Komplexe Zahlen

# 42 Abituraufgaben aus der Schweiz

# Teil 1

Datei Nummer 50050

Stand: 20.9.2023

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

# Vorwort

Dieser Text enthält 42 Aufgaben zu komplexen Zahlen aus Prüfungsaufgaben der Schweizer Matura mit besonderem Niveau. Zwei davon werden also Musterbeispiele gezeigt.

Die Lösungen wurden alle von mir erstellt.  Teilaufgaben davon stehen auch noch in den Themen-Texten zu komplexen Zahlen als zusätzliche Übungsaufgaben.

# Komplexe Zahlen – 2023 / Winter

Wir untersuchen eine Folge komplexer Zahlen, die durch die rekursive Definition

$z_{n+1} = z_n \cdot q$ mit $z_0 = 8+2i$, $z_1 = 3+5i$ und $z_4 = -2-\frac{1}{2}i$ gegeben ist.

a) Berechnen Sie $z_2$ und $z_3$.

b) Zeichnen Sie $z_0, \dots, z_4$ in die komplexe Zahlenebene.

c) Zeigen Sie, dass $z_0$ und $z_4$ auf einer Geraden liegen.

d) Bestimmen Sie die explizite Gleichung dieser komplexen Folge.

Beweisen Sie, dass gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

e) Wie lang ist die Strecke $\overline{z_0 z_1} + \overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \dots$ ?

# Komplexe Zahlen – 2022 / Sommer

a) Geben Sie den Kehrwert von $z = 3+4i$ in Normalform an.

b) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = -32$ an.

c) Lösen Sie die Gleichung $z^5 - i\cdot z^4 - z + i = 0$. Eine Lösung ist $z = i$.

d) Es sei $z_0 = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(30^\circ\right) + i\cdot\sin\left(30^\circ\right)\right)$. Berechnen Sie $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z_0^k$ in Normalform.

e) Berechnen Sie für $t \in \{0, 6, 12\}$ die numerischen Werte von

$$w(t) := \left(2^{-\frac{1}{12}}\cdot\left(\cos\left(30^\circ\right) + i\cdot\sin\left(30^\circ\right)\right)\right)^t$$ in Normalform.

Zeichnen Sie in einer Gaußschen Zahlenebene (Längeneinheit 10 cm) die Kurve ein, auf der alle Zahlen $w(t)$ für $0 \le t \le 12$ liegen.

**usw.**

## Lösungen – 2023 / Winter

Wir untersuchen eine Folge komplexer Zahlen, die durch die rekursive Definition

$z_{n+1} = z_n \cdot q$ mit $z_0 = 8+2i$, $z_1 = 3+5i$ und $z_4 = -2-\frac{1}{2}i$ gegeben ist.

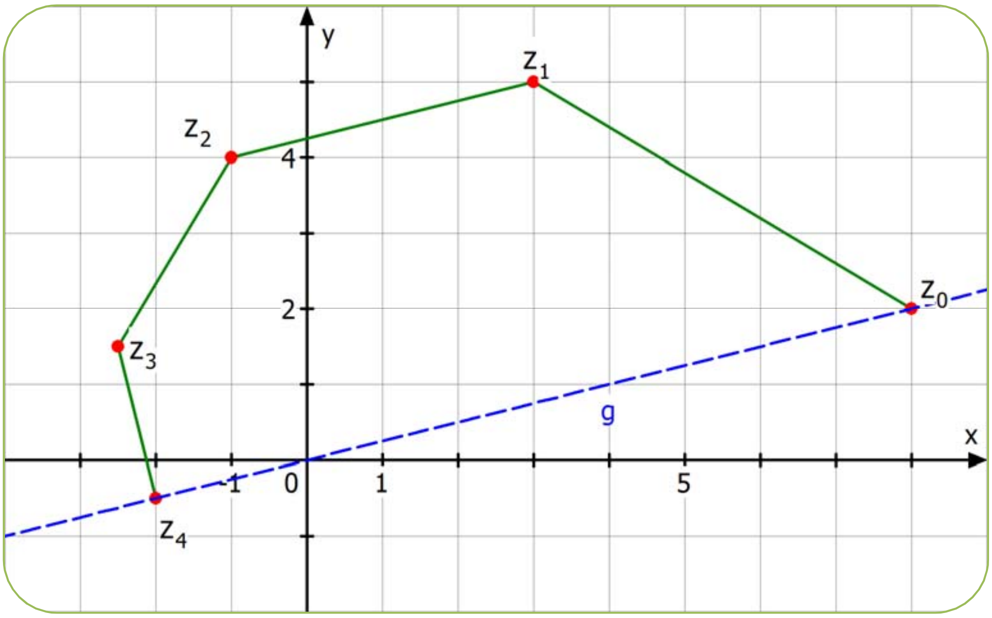
a) Berechnen Sie $z_2$ und $z_3$.

Es ist $q = \frac{z_1}{z_0} = \frac{3+5i}{8+2i} = \frac{3+5i}{8+2i} \cdot \frac{8-2i}{8-2i} = \frac{24-6i+40i+10}{64+4} = \frac{34+34i}{68} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_2 = z_1 \cdot q = (3+5i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{5}{2}i-\frac{5}{2} = -1+4i$

$z_3 = z_2 \cdot q = (-1+4i)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+2i-2 = -\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$

b) Zeichnen Sie $z_0, \dots, z_4$ in die komplexe Zahlenebene.




c) Zeigen Sie, dass $z_0$ und $z_4$ auf einer Ursprungsgeraden liegen.

Die Gerade g durch O und $z_0$ hat die Steigung $m = \frac{2}{8} = \frac{1}{7} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$

Liegt $z_4 = -2-\frac{1}{2}i$ auf g? Punktprobe: $\boxed{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\boxed{-2}$ ist eine wahre Aussage.

d) Bestimmen Sie die explizite Gleichung dieser komplexen Folge.

$z_1 = z_0 \cdot q \Rightarrow z_2 = z_0 \cdot q^2 \Rightarrow z_3 = z_o \cdot q^3 \Rightarrow z_n = z_o \cdot q^n$

Ergebnis: $z_n = (8+2i)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$

Beweisen Sie, dass gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Da $|q| = \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$ konvergiert die Folge.

und es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |8+2i|\cdot|q|^n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{68}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}^n = 0$

e) Wie lang ist die Strecke $s = \overline{z_0 z_1} + \overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + ....$ ?

$$\overline{z_0 z_1} = |z_1 - z_0| = |(3+5i)-(8+2i)| = |-5+3i| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$\overline{z_1 z_2} = |z_2 - z_1| = |(-1+4i)-(3+5i)| = |-4-i| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{z_2 z_3} = |z_3 - z_2| = \left|\left(-\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}i\right)-(-1+4i)\right| = \left|-\tfrac{3}{2}-\tfrac{5}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{25}{4}} = \sqrt{\tfrac{34}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{34}$$

$$\overline{z_3 z_4} = |z_4 - z_3| = \left|\left(-2-\tfrac{1}{2}i\right)-\left(-\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}i\right)\right| = \left|\tfrac{1}{2}-2i\right| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}+4} = \sqrt{\tfrac{17}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{17}$$

Man kann die Summenden in eine gleiche Form bringen:

$$s = \sqrt{34} + \sqrt{\frac{34}{2}} + \sqrt{\frac{34}{4}} + \sqrt{\frac{34}{8}} + ... = \sqrt{34} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}^2 + \sqrt{\frac{1}{2}}^3 + ...\right)$$

Und erkennt eine geometrische Reihe mit $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Dann folgt:

$$s = \sqrt{34} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{34} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{34} \cdot \frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{34} \cdot \frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{34} \cdot 2 \cdot \left(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{34} \cdot \left(2+\sqrt{2}\right)$$

***Zusatz: Man kann die geometrische Reihe auch theoretisch herleiten:***

$$\overline{z_{n+1} - z_n} = \left|(8+2i)\cdot\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right)^{n+1} - (8+2i)\cdot\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right)^{n+1}\right| = \left|(8+2i)\cdot\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right)^{n}\right| \cdot \left|\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i-1\right)\right|$$

$$= \left|(8+2i)\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right)\right| \cdot \left|\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right|^n = |-4+4i-i-1|\left|\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right|^n = |-5+3i|\left|\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right|^n = \sqrt{25+9}\left|\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right|^n$$

$$= \sqrt{34} \cdot q^n \quad \text{mit} \quad q = \left|\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Dann folgt die Reihenformel….

# Lösung 2022 / Sommer

a) Geben Sie den Kehrwert von $z = 3+4i$ in Normalform an.

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

b) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = -32$ an.

Polardarstellung von -32: $a = 32\cdot E\left(180^\circ + k\cdot 360^\circ\right)$

Lösungsansatz $z = r\cdot E(\varphi)$: $z^5 = r^5\cdot E(5\varphi)$

Vergleichen: $r^5 = 32 \;\Rightarrow\; r = 2$

und $5\varphi = 180^\circ + k\cdot 360^\circ$

also $\varphi = 36^\circ + k\cdot 72^\circ$

Lösungsformel: $z_k = 2\cdot\left(\cos\left(36^\circ + k\cdot 72^\circ\right) + i\cdot\sin\left(36^\circ + k\cdot 72^\circ\right)\right)$, k = 0,1,2,3,4

Ausführlich:

$z_0 = 2\cdot\left(\cos\left(36^\circ\right) + i\cdot\sin\left(36^\circ\right)\right) \approx 1{,}62 + i\cdot 1{,}18$

$z_1 = 2\cdot\left(\cos 108^\circ + i\cdot\sin 108^\circ\right) \approx -0{,}62 + i\cdot 1{,}90$

$z_2 = -2$

$z_3 \approx -0{,}62 - i\cdot 1{,}90$

$z_4 \approx 1{,}62 - i\cdot 1{,}18$

*Mein CAS:*

```
Define wu(k)=2*(cos(36+k*72)+i*sin(36+k*72))
                                         done
wu(0)
              1.618033989+1.175570505·i
wu(1)
            -0.6180339887+1.902113033·i
wu(2)
                                           -2
wu(3)
            -0.6180339887-1.902113033·i
wu(4)
              1.618033989-1.175570505·i
```

c) Lösen Sie die Gleichung $z^5 - i\cdot z^4 - z + i = 0$. Eine Lösung ist $z = i$.

Man kann entweder mit Polynomdivision zerlegen: $\left(z^5 - i\cdot z^4 - z + i\right):(z-i) = \ldots$

Oder eleganter durch Ausklammern zusammenfassen:

$$z^5 - i\cdot z^4 - z + i = z^4\cdot(z-i) - (z-i) = \left(z^4 - 1\right)\cdot(z-i)$$

Damit folgt: (1): $z^4 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right) = 0$

Also $z^2 = 1 \;\Rightarrow\; z_{1,2} = \pm 1$, $\quad z^2 = -1 \;\Rightarrow\; z_{3,4} = \pm i$

(2) $z_5 = i$ (doppelte Lösung)

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1, -1, i, -i\}$

d) Es sei $z_0 = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(60^\circ\right) + i\cdot\sin\left(60^\circ\right)\right)$. Berechnen Sie $s = \sum_{k=0}^{\infty} z_0^k$ in Normalform.

Man erhält $z_0 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4} + i\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

$s = \sum_{k=0}^{\infty} z_0^k$ stellt eine unendliche geometrische Reihe dar mit q = $z_0$.

Es gilt: $$s = \frac{1}{1-z_0} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot i}\cdot\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot i}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot i} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot i}{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot i}{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot i$$

e) Berechnen Sie für $t \in \{0, 6, 12\}$ die numerischen Werte von

$w(t) := \left(2^{-\frac{1}{12}} \cdot \left(\cos(30^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ)\right)\right)^t$ in Normalform.

$$w(0) = \left(2^{-\frac{1}{12}} \cdot \left(\cos(30^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ)\right)\right)^0 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \approx 0{,}94$$

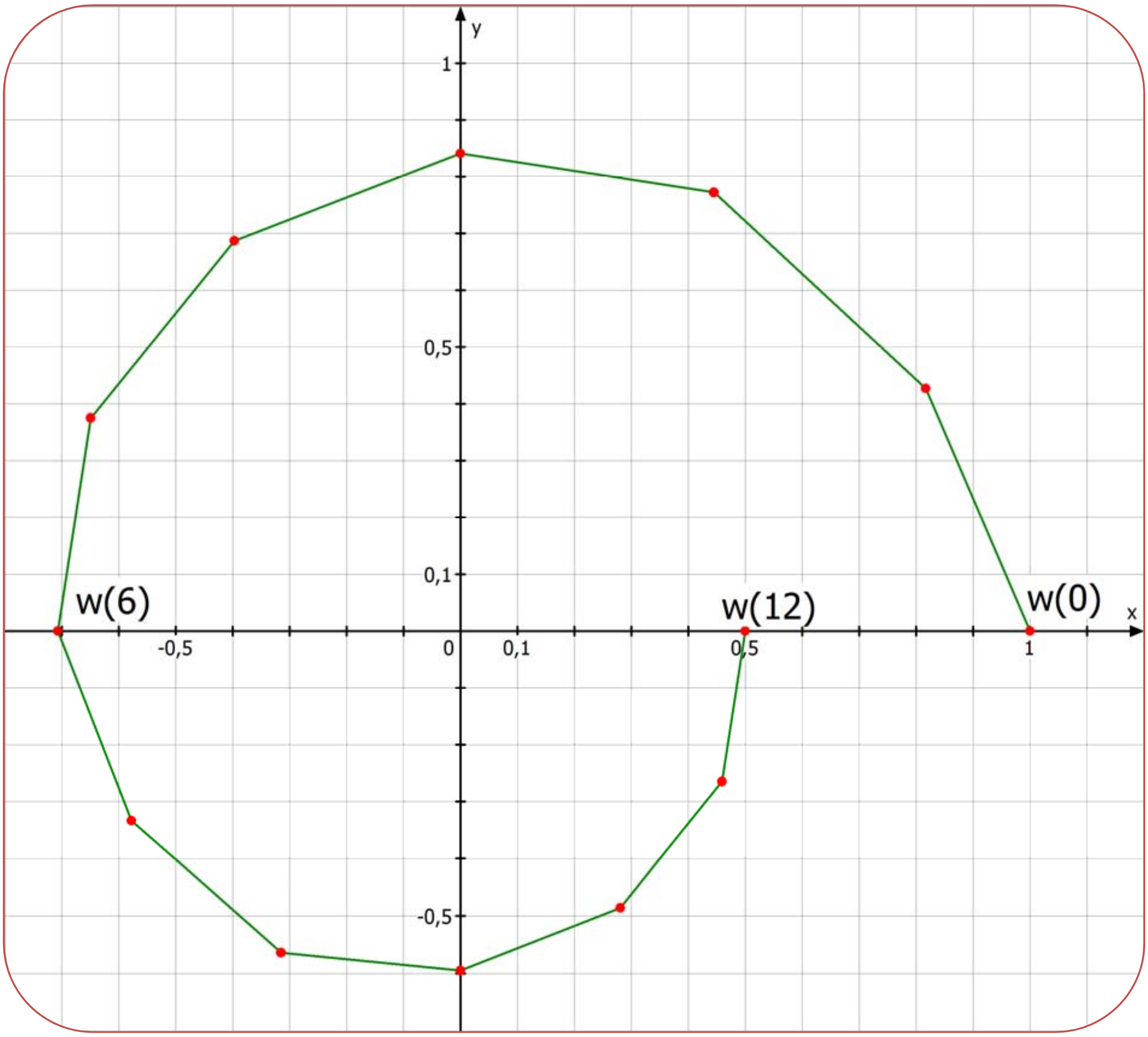
$$w(6) = \left(2^{-\frac{1}{12}} \cdot \left(\cos(30^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ)\right)\right)^6 = 2^{-\frac{6}{12}} \cdot \left(\cos(6 \cdot 30^\circ) + i \cdot \sin(6 \cdot 30^\circ)\right)$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos(180^\circ) + i \cdot \sin(180^\circ)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1 + 0 \cdot i) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}707$$

$$w(12) = \left(2^{-\frac{1}{12}} \cdot \left(\cos(30^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ)\right)\right)^{12} = 2^{-\frac{12}{12}} \cdot \left(\cos(12 \cdot 30^\circ) + i \cdot \sin(12 \cdot 30^\circ)\right)$$

$$= 2^{-1} \cdot \left(\cos(360^\circ) + i \cdot \sin(360^\circ)\right) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0 \cdot i) = \frac{1}{2}$$

Zeichnen Sie in einer Gaußschen Zahlenebene (Längeneinheit 10 cm) die Kurve ein, auf der alle Zahlen $w(t)$ für $0 \le t \le 12$ liegen.



Hier meine mit CAS erstellte Wertetafel: